15/30

DENEYİN ADI: Maxwell Hız Dağılımı

DENEYİN AMACI: Maxwell Hız Dağılım fonksiyonunu oluşturulan bir modelleme ile incelemek.

KURAMSAL BİLGİ:

Bu deneyde kullanacağımız metod şu esasa dayanır: Cam bilyelerden oluşan molekül modellerimizi bir odadan bırakır ve bir filtre odasından geçiririz. Filtre odası 2 kapıya sahiptir öyleki ancak belirli küçük açıya sahip hız bileşenine sahip bilyeler bu kapılardan dışarı çıkabilir. Yatay olarak başalan bilyelerin hızı (s) mesafesi içinde

$$s = v \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

ile verilir. Burada H düşme yüksekliğidir. "s" ayrı ayrı bilyelerin hızı ile orantılıdır. Çünkü tüm bilyeler aynı yükseklikten düşerler. Bu 2 kapıdan birinden eşmerkezli ve eşit uzaklıktaki bilyelerin hızları v ile $v + \Delta v$ aralığında kalır.

Bu deneyde bilyeleri alan 2 sistem vardır. Bunlardan biri halka sektörlü plakadır. Plaka bir yapışkanla kaplanmıştır. Bu bilyeleri düştükleri noktada alıkoyor. 2. sistem ise kayıt odalı alıcıdır. Bilyeler oluğa benzer halka sektörlerinde yakalanır. Test edildikten sonra kayıt odasına transfer edilir. Bu sistemde sistem için belirlenen bilye sayısından daha fazlasını toplamak mümkün olur.

Deneyde şu prosedür takip edilir: Oda kapağının yüksekliği yaklaşık 60 mm olarak ayarlanır öyleki bilyeler hacim içinde düzenli dağılabilsin. Ayrıca bilyelerin hız dağılımı test boyunca sabit kalmalıdır. Bu nedenle uyarma frekansı (örneğin 3000/dk.) sabit olarak bir neon lamba yada stroskop ile kontrol edilir ve gerekirse yeniden ayarlanır. Ayrıca odadan seçilen bilye sayısı düzenli olarak yer değiştirmelidir.

Sonuçta belirli bir hızın en sık olarak görüldüğü bundan az ve çok hızların frekanslarının az olduğu görülür. Çoğu bilye belirli bir v ile $v + \Delta v$ aralığında yer alırlar.

Ayrıca ortalama bir zamanda oluşan 2 çarpma arasındaki λ yer değiştirmesi (Ortalama serbest yerdeğiştirme uzunluğu)

$$\lambda = \frac{V}{N \cdot 4\pi r^2 \sqrt{2}}$$

ile verilir. V hacimdir. N bilye sayısıdır.

Maxwell Hız Dağılım Fonksiyonu:

Çevreden yalıtılmış bir hacimin gazla dolu olduğunu varsayalım. Bu gazın parçacıklarının mikroskopik durumunun incelenmesi gazın makroskopik durumunun belirlenmesini sağlar. Parçacıkların durumu ise ancak kuantum fiziği ile incelenebilir. Yani olasılıklarla açıklanabilir.

Ancak sistemin makroskopik durumu eğer kullandığımız gaz ideal gaz ise yani parçacıklar arasındaki etkileşme yok ise bu durumda parçacıkların tekil hızlarının ölçülmesi ilede belirlemek mümkündür.

Maxell-Boltzman parçacıkları klasik mekanik yasalarının uygulanabildiği parçacıklardır. Eğer gaz idealse atomlar yada moleküller arası uzaklık nedeniyle etkileşmeler azdır, ayrıca moleküller arası uzaklık çok büyük olduğundan kuantum mekaniksel etkiler göz ardı edilebilir. Ayrıca sistemi oluşturan gaz atomlarının sahip oldukları dalga boyunun kutunun boyutlarından çok küçük olması da seçilmelidir. İşte bu durumda bu gaz idealdir ve gazı oluşturan parçacıkların hızı, enerjisi süreklilik gösteriyor gibi düşünülür.

N parçacık için Maxwell hız dağılım fonksiyonu;

$$F(v)dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$$ ile verilir. Şimdi bunu çıkarmaya çalışalım.

Bir parçacığın r konum ve E_r enerjisine sahip olma olasılığı $P_r \propto e^{-\beta E_r}$ ile verilir. Burada $\beta = \frac{1}{kT}$ olup k Boltzman sabiti ve T'de Kelvin cinsinden sıcaklıktır. Ayrıca bu ideal gaz sisteminde tüm enerji kinetik olup $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ olur.

Bu durumda bir parçacığın r ile r+dr konumları arasında ve p, p+dp momentumuna sahip olma olasılığı;

$$P(\vec{r},\vec{p})\,d^3\vec{r}\,d^3\vec{p} \propto e^{-\beta p^2/2m}\,d^3\vec{r}\,d^3\vec{p}$$ ile verilecektir.

Buradan $d^3r = dx\,dy\,dz$ ve $d^3p = dp_x\,dp_y\,dp_z$'dir.

Momentumu hıza $\vec{v} = \frac{p}{m}$ ile bağlayabiliriz ve yukarıdaki ifadeyi parçacığın r ile r+dr konumunda v ile v+dv hızına sahip olma ihtimali biçiminde yazarsak ve burada P' dersek;

$$P'(\vec{r},\vec{v})\,d^3\vec{r}\,d^3\vec{v} \propto e^{-\beta mv^2/2}\,d^3\vec{r}\,d^3\vec{v} \quad (1)$$ olur.

Biz yalnızca hız ile ilgilendiğimizden ve konumdan bağımsızlık sağlamak istediğimizden parçacığın $\vec{v}$ ile $d\vec{v}+\vec{v}$ arasında bulunmasını veren fonksiyon $f(\vec{v})d^3\vec{v}$ yi bulmak istiyoruz. Bu halde (1)'in de yardımı ile N parçacık için;

$$f(\vec{v})\,d^3\vec{v} \propto N\frac{P'(\vec{r},\vec{v})\,d^3\vec{r}\,d^3\vec{v}}{d^3\vec{r}}$$ olup C gibi bir orantı sabiti tanımlarsak;

$$f(\vec{v})\,d^3\vec{v} = C e^{-\beta mv^2/2}\,d^3\vec{v}$$ olur. C sabitinin değeri nedir? Bunu da kolayca bulabiliriz. Toplam parçacık sayımız N idi. Bu nedenle $f(v)$ frekanslı parçacıkların tüm hız uzayı üzerinden toplamı bize N'i vermelidir. Yani:

$$\int f(v)\,d^3\vec{v} = N$$ olur. $dv = dv_x\,dv_y\,dv_z$ olduğundan

$$N = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta mv^2/2}\,d^3v$$ ile

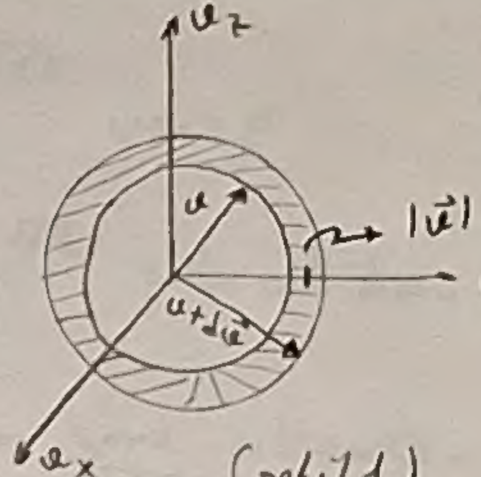
$$N = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta mv^2/2}\,dv_x\,dv_y\,dv_z$$

$$N = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta mv_x^2/2}dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta mv_y^2/2}dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta mv_z^2/2}dz$$

olur. Bu integraller;

$$= C\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}}$$ verip $N = C\left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{3/2}$ elde ederiz ve $C = N\left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2}$ olur.

Bu durumda $f(\vec{v})\,d^3v = N\left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta m v^2/2}\, d^3\vec{v}$ olur (2)



(şekil 1)

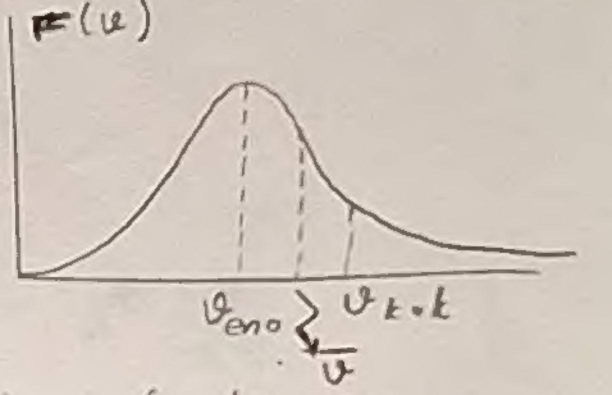
Şimdi (şekil 1)'e bakalım. Bir parçacığın v ile $v+dv$ bölgesinde (taralı bölge) ve belirli bir $|\vec{v}|$ hızına sahip olma olasılığı ne ile verilir. Hiç şüphesiz

$$F(v)\,dv = \int' f(v)\,d^3v = 4\pi v^2 f(v)$$

olacaktır.

Sonuç olarak bir parçacığın v uzayı içerisinde v ile $v+dv$ hızları arasında belirli bir $|\vec{v}|$ hızına sahip olma ihtimalinin fonksiyonu Maxwell hız dağılım fonksiyonu adını alıp

$$(3)\quad F(v)\,dv = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}\, v^2\, dv \text{ ile verilir.}$$



Bu fonksiyonun eğrisi şekil 2'de verilmiştir. Ayrıca enolası hız, ortalama hız ve hızların kare ortalamalarının kökü de gösterilmiştir. Şekilden de anlaşılabileceği gibi enolası hız v_{eno} $F(v)$'nin max değeri aldığı hızdır.

Bu hız değeri matematiksel olarak $F(v)dv$ ifadesinin v'ye göre türevinin 0'a eşit olduğu değerdir (şekil 2) yani;

$\frac{dF(v)}{dv} = 0$ değeridir. Bu değeri sağlayan $v = v_{eno}$ olacaktır.

Bu değer $4\pi N\left(\frac{m}{2kT\pi}\right)^{3/2}\left[-\frac{m}{2kT}2v^3 e^{-mv^2/2kT} + 2v e^{-mv^2/2kT}\right] = 0$

'dan $-\frac{mv^2}{kT} + 2 = 0$ ve $\boxed{v_{eno} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}$ bulunur.

Ayrıca $\bar{v} = \dfrac{\int_0^\infty F(v)\,v\,dv}{\int_0^\infty F(v)\,dv} = \frac{1}{n}\int_0^\infty F(v)\,v\,dv$ ile verilir.

v_{rms} ise $v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\int_0^\infty F(v)\,v^2\,dv}$ olur.

$$\bar{v} = \int_0^\infty P(v)\,dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3\,dv \text{ olup}$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3\,dv = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{-2} \text{ olup}$$

$$\bar{v} = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} \text{ olarak bulunur.}$$

Bu kısım anlayarak yazılmamış!
Bu kısım anlayarak yazıldı ama siz yekmece anlayışlı değilsiniz!

$\overline{v^2} = \int_0^\infty P(v) v^2 dv$ 'den $\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-mv^2/2kT} v^4 dv$

olup $\int_0^\infty e^{-mv^2/2kT} v^4 dv = \left(\frac{9\pi}{64}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{-5/2}$ verip

$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$ olur. Dolayısıyla $V_{kt} = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2}$ olarak bulunur. Ayrıca biz bu deneyde ölçümleri konuma göre alacağımız için (3) nolu Maxwell hız bağıntısını $v = s\sqrt{\frac{g}{2H}}$ yardımı ile konuma göre yazmalıyız. Bu halde

$$f(s) = N4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-(m/2kT) s^2 \frac{g}{2H}} s^2 \frac{g}{2H} \text{ olur. } (4)$$

Ayrıca yine $s_{e\rho} = \left(\frac{4kTH}{mg}\right)^{1/2}$ olur.

(4)'ü $s_{e\rho}$ cinsinden yazarsak;

$$f(s) = 4N\pi \left(\frac{2H}{g\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{mg}{4kTH}\right)^{3/2} e^{-\frac{mg}{2kTH} s^2} s^2 \frac{g}{2H}$$

olup $f(s) = \sqrt{\frac{16HN}{\pi g}} (s_{e\rho})^{-3/2} e^{-\frac{s^2}{s_{e\rho}^2}} s^2$ olur.

VERİLER VE VERİLERİN ÇÖZÜMLENMESİ:

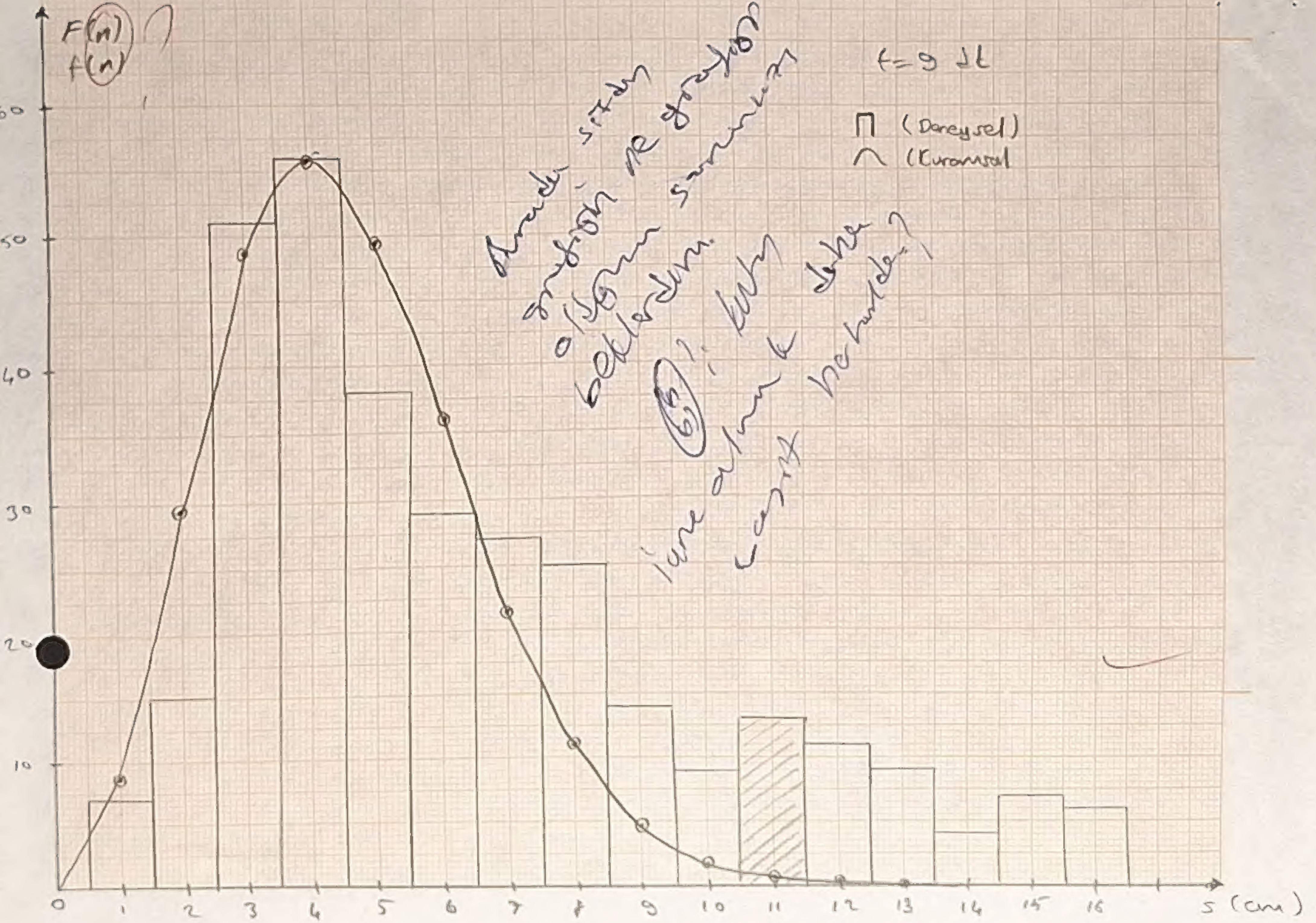
f = 2600 Hz'de çalıştık ve şu verileri elde ettik. N = 400 bilye ile

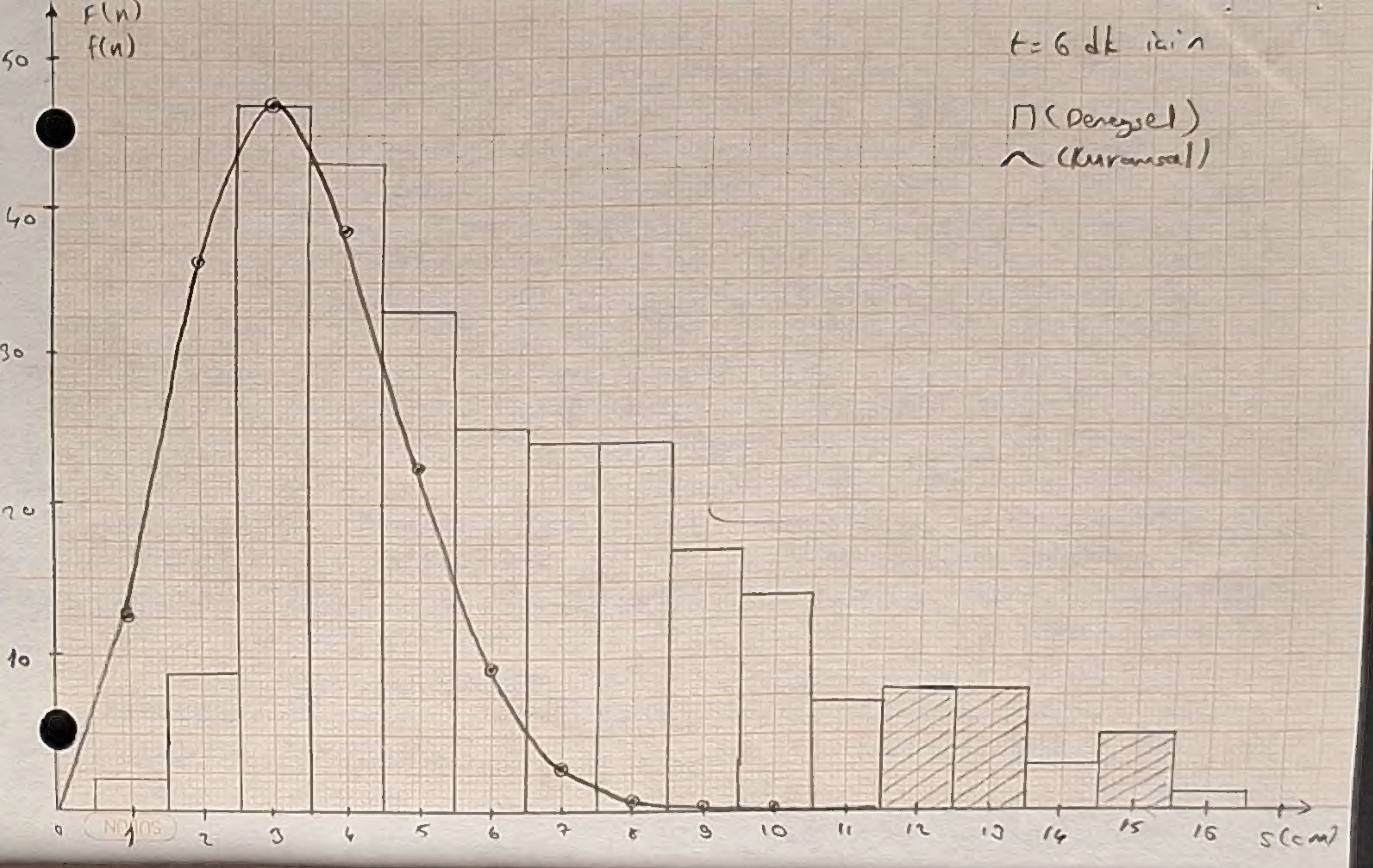
	s (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
F(n) frekans	3 dk	1	10	44	43	35	25	25	23	19	13	9	12	5	5	5	2	adet
	6 dk	2	9	47	43	33	25	24	24	17	14	7	8	8	3	5	1	adet
	9 dk.	7	15	51	56	38	29	27	25	14	9	13	11	9	4	7	6	adet

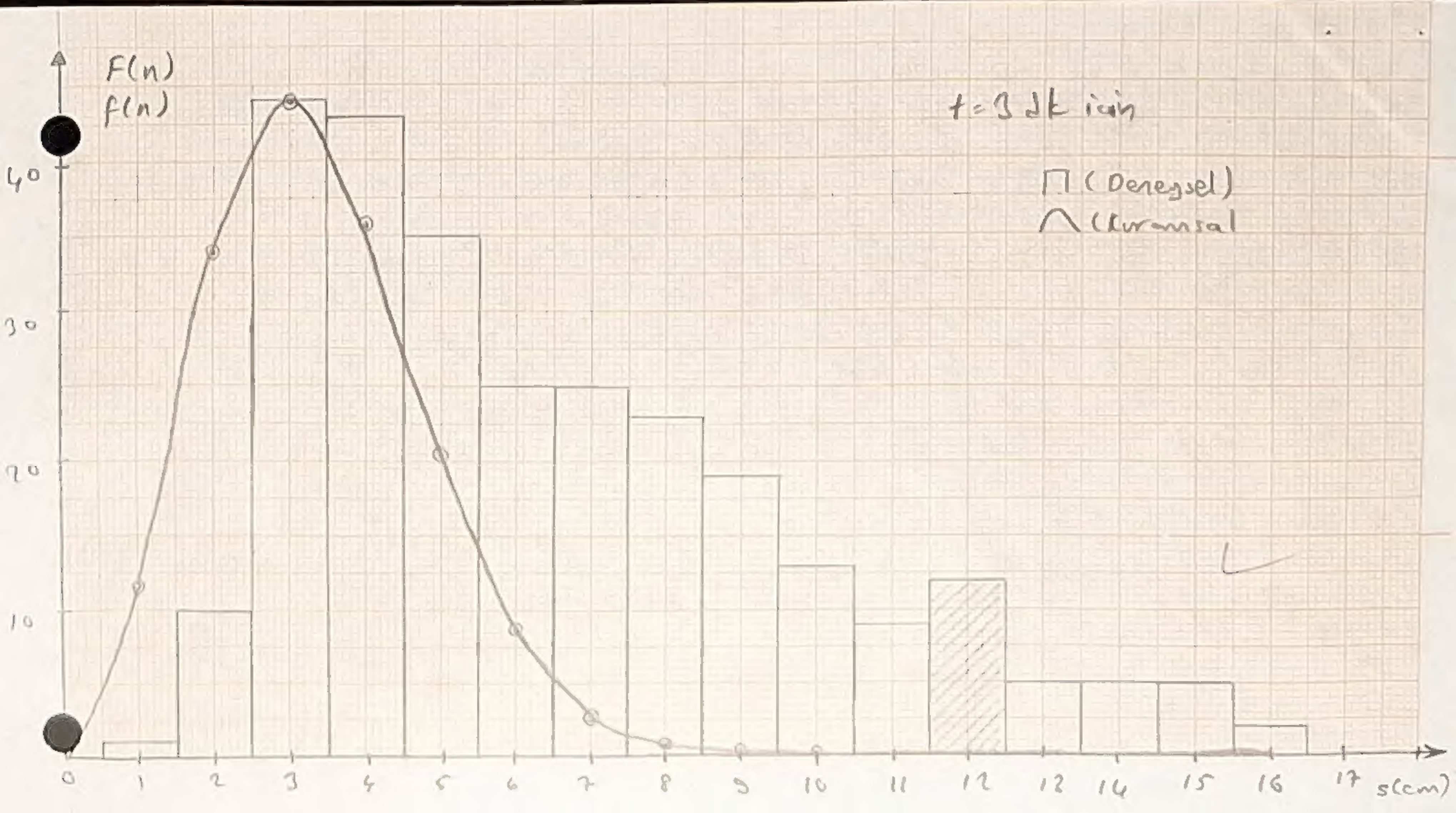
Gerçekte ölçüm sonuçlarını aldığımız araç 24 cm'e kadardı. Ama aleti çevreleyen plastik çepere çarparak geri dönen bilyelerin çoğu normalde düşmemesi gereken hole'lere düştü. Bu nedenle 16 ve sonrasındaki hole'lerde yer alan bilye sayısına bu yansıyan (ya da seken) bilyelerde düştüğünden bizi yanıltabilecekti. (Bu farklılık ve pikler verilerde görüldü) bunları çözümleyeceğim veriler grubuna katmadım.

İlk olarak her 3 dk. içinde s'ye karşı frekans değerlerinin histogramını çizdik.

Daha sonra N(s) değerlerini hesaplayarak histogramı çizdiğimiz grafik üzerine işaretleyerek eğriyi çizdik. 2 türde elde ettiğimiz değerleri karşılaştırdık.


F(n)
f(n)
t=9 dk
(Deneysel)
(Kuramsal
10
20
30
40
50
60
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
s (cm)


F(n)
f(n)
t=6 dk için
(Deneysel)
(Kuramsal)
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
s(cm)


F(n)
f(n)
t=3 dk için
(Deneysel)
(Kuramsal
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
s(cm)

$t=3$ dk için (ayrıca $t=6$ dakika için) $s_{eno}=3$ cm. olarak verilerden elde edilmiştir.

Buradan $t=3$ ve $t=6$ dk için $v_{eno} = s_{eno}\sqrt{\frac{g}{2H}}$

$$v_{eno} = 3\sqrt{\frac{980}{2\cdot 7}} = 25.1 \text{ cm/s.}$$ olarak bulunur.

Ayrıca $v_{rms} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, v_{eno}$ olup $v_{rms} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 25.1 = 30.7$ cm/s

ve $\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\, v_{rms}$ olup $\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\, 30.7 = 28.3$ cm/s olarak bulunur.

$t=9$ dk için ise $s_{eno} = 4$ cm olarak görülüyor.

Buradan $v_{eno} = 4\sqrt{\frac{980}{2\cdot 7}} = 33.5$ cm/s bulunur.

$v_{rms} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, 33.5 = 41.0$ cm/s ve $\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\, 41.0 = 37.8$ cm/s bulunur.

Buradan her s değeri için f(s) değerlerini bulup grafiğe geçebiliriz. Ama öncelikle f(s) eşitliğinde $s = s_{eno}$ durumunu alıp f(s)'i tamamı ile s_{eno}'ya bağlı yazarsak;

$$f(s) = F(s_{eno}) \cdot e \cdot (s_{eno})^{-2} s^2 e^{-\frac{s^2}{s_{eno}^2}}$$ buluruz. Ya da düzenlersek

$$f(s) = \frac{F(s_{eno})\, e\, s^2 e^{-s^2/(s_{eno})^2}}{(s_{eno})^2}$$ olur.

Bu formül yardımıyla her bir s için $t=3, 6, 9$ dk'larda f(s)'leri hesaplayıp tabloya geçirdim.⁺

	s(cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3 dk	f(s) olasılık	11.8	33.9	43.7	35.7	20.5	8.7	2.8	0.7	0.1	0.02	0.002	~0	~0	~0	~0	~0
6 dk		12.7	36.4	47.0	38.4	22.1	9.4	3.0	0.7	0.1	0.02	0.002	~0	~0	~0	~0	~0
9		8.9	29.4	48.7	55.9	49.8	36.0	21.7	11.1	4.9	1.8	0.6	0.2	0.04	0.09	0.002	~0

Ayrıca $V = 72$ cm³, $N = 400$, $r \simeq 0.1$ cm. ile ortalama serbest yol λ

$$\lambda \simeq \frac{72}{400 \times 4\pi \times (0.1)^2 \sqrt{2}} \simeq 1.0$$ cm. olur. Bilyelerin birim zamandaki çarpışma sayısı ise (ortalama);

$\bar{z} = \frac{v}{\lambda}$ olup $v = \frac{s\sqrt{g}}{\sqrt{2H}} = 3\sqrt{\frac{980}{2\cdot 7}} = 25$ cm/s olup

bu değeri $\bar{z}$ eşitliğinde yerine koyarsak;

$$\bar{z} = \frac{25 \text{ cm/s}}{1 \text{ cm}} = 25\, s^{-1}$$ olup cam bilyeler saniyede

---

⁺ Formüller $t=3$ dk için $f_3(s) = 13.2\, s^2 e^{-s^2/9}$

$t=6$ dk için $f_6(s) = 14.2\, s^2 e^{-s^2/9}$

$t=9$ dk için $f_9(s) = 9.5\, s^2 e^{s^2/16}$ haline gelir.

25 çarpışma yapıyor.

SONUÇ VE YORUM: Deney sonucunda kuramsal değerler ile gözlenen değerlerin ϑero civarında uyuştukları ama ϑero'dan uzaklaştıkça büyük sapmaların görüldüğünü grafikten çıkarmak mümkündür. Bu sapmalar baştan da söylendiği gibi çok hızlı olup çepere çarpıp geri dönen bilyelerden kaynaklanabileceği gibi N sayısının az olmasından da kaynaklanabilir.
Ayrıca başta s=3cm'de gözüken ϑero, 9 dk. değeri için s=4cm'de ortaya çıkmıştır. Çarpılan bilyelerin T sıcaklığının yükselmesi buna neden olmuş olabilir.

Daha düzenli rapor hazırlamalısın!

Sen raporun ne anlarsın gerizekalı!

Sizler [illegible] olup öğrencilerinize havale etmekten başka bir işle meşgul olmuyor musunuz?

Hiç gerçekten bilimsel çalışma yaptınız mı?

Bu [illegible] [illegible] üretip DOĞA'dan başka deneyleri araştırmaları yapmıyorsunuz benzemez?

İşte bu nedenle bir [illegible] [illegible] alanında [illegible] [illegible].

MAXWELL HIZ DAĞILIMI

Amaç: Bir sistemin makroskopik durumunu; sistemi oluşturan parçacıkların hız (enerji) dağılımlarını bularak incelemeyi öğrenmek.

Kuramsal Bilgi: Yalıtık ve kapalı iç gazla dolu bir hacim içindeki parçacıkların mikroskopik (kuantum) durumları, o sistemin (hacim içindeki gazların) makroskopik durumunu belirler. Klasik Termodinamik (~~istatistik fizik~~) bir sistemin makroskopik durumlarını incelerken; o sistemin o andaki en olası halini oluşturan mikroskopik durumları göz önüne alınır. Oysa sistemin o an için gözlenen durumu, kuantum fiziğinden yararlanan ve dalga tabiatı (parçacığın) üzerine kurulan İstatistik Fizik için; sistemin gözlenen makroskopik durumu için, o durumu veren erişilebilir (accessible) kuantum durumlarının sayısıyla, dolayısıyla bir olasılıkla açıklanabilir. O makroskopik durumu veren, en olası kuantum durumları olabileceği gibi en küçük olasılıklı kuantum durumları o makroskopik durumu verebilir.

Sistemin makroskopik durumu (T, E, P gibi niceliklerin ölçülmesi ile belirlenen durum), sistemi oluşturan parçacıkların tek tek hızlarının ölçülmesi, ve bunların toplanmasıyla, mikroskopik durumların bilinmesine gerek kalmadan belirlenebilir.

Maxwell-Boltzman parçacıkları klasik mekanik yasalarının uygulanabildiği parçacıklardır. (Sistemi oluşturan çok atomlu ya da ayırt edilebilir parçacıklar olarak nitelendirilebilir). Eğer sistemi oluşturan gaz, yeteri derecede seyreltikse, atomlar ya da moleküller arası uzaklık nedeniyle, parçacıklar arasındaki etkileşmeler zayıftır. Ayrıca moleküller arası uzaklık uzaklık çok büyük olduğunda kuantum mekaniksel etkiler göz ardı edilir. Bu durumda sistemi oluşturan gaz atomlarının dalga boylarının kutu boyutlarından çok küçük olmasıda seçilmelidir. Sözü edilen tanıma uygun gaza ideal gaz denir. İdeal gaz sistemindeki parçacıkların hızları, enerjileri sürekli olarak düşünülür.

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(n_x^2+n_y^2+n_z^2) \qquad R = n_x^2+n_y^2+n_z^2 = \frac{L}{\hbar\pi}2mE_n$$

n_x, n_y, n_z pozitif sayılar olabilir bunun için R yarıçaplı kürenin $\frac{1}{8}$ lik kesimi, $(n_x n_y n_z)$'i uzayında parçacığın girilebilir kuantum durumları sayısını sağlar

$$g(E_n) = \frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{V}{6\pi^2}\left(\frac{2mE_n}{\hbar^2}\right)^{3/2}$$

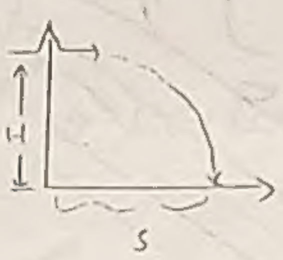
Buradan, enerji başına düşen girilebilir kuantum durumları sayısı olarak ifade edilen durum yoğunluğu

$dg(E_n) = D(E_n)dE$ den;

$D(E_n) = \frac{V}{4\pi^2}(2m/\hbar^2)^{3/2}E_n^{1/2}$ dir. (Durum yoğunluğu)

Enerjideki artım girilebilir kuantum durumları sayısını (g_n) i arttırır bu da $D(E_n)$'i arttırır.

Yapacağımız deneyde gaz atomları yerine boncuklar kullanacağız. Aynı büyütme oranında da sistemin hacmini büyütmeliyiz.



$x.t = s \qquad t = s/v$

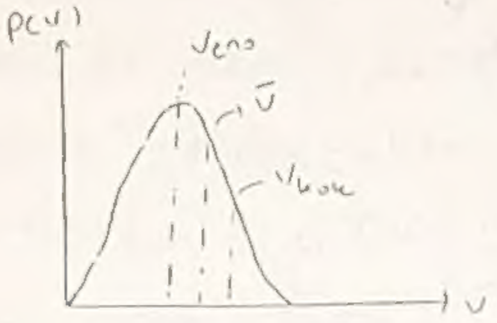
$\frac{1}{2}gt^2 = H \qquad t = \left(\frac{2H}{g}\right)^{1/2}$

$$\frac{s}{v} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow s = v\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Bir molekülün hızının v ile $v+dv$ arasında dalgalanma(sı) olasılığı (bu dalgalanmanın sabit kalması, sistemin dış parametrelerinin durgun kalması için titreşim frekansını sabit tuttuk)

$$P(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv$$

ile verilir. $P(v)$ olasılığı; tek parçacık için gözlenen hızın, bu parçacık için bu hızı veren olası kuantum durumlarının toplamıdır.



ve bu toplam da yandaki dağılımı gösterir.

Mayıs. 3. 1993

19/30 [illegible]

DENEYİN ADI: YÜKLENMİŞ ZAR

DENEYİN AMACI: İstatistik fiziğin yöntemlerini kullanarak verilen 2 zardan hileli olanını bulmak ve hangi yüz ya da yüzlerin hileli olduğunu ortaya çıkartmak.

KURAMSAL BİLGİ:

Bu deneyde verilen iki zarı mümkün olduğunca fazla atarak olabildiğince veri almak ve bu verilere dayanarak hileli zar ve yüzü bulmaktır. Yalnız bu işlemin kötü yanı bazı hallerde [illegible] [illegible] verebilmesidir çünkü zarın bırakılış [illegible], zarın dönüp dönmemesi, masaya ve yüzeylere çarpması hangi yüzün üste geleceğini belirleyecektir. Yine de çok sayıda atış yaparak ve yukarıda saydığımız nedenlerin gelişigüzel olduğunu kabul ederek zarın yüklenmiş olup olmadığını belirleyebiliriz. Ayrıca bir başka sorun zarın yüklü olup olmadığına nasıl güvenebiliriz

Eğer zarın bir yüzü gelişigüzel bir frekansla [illegible] [illegible] üste geliyorsa zarın diğer kısmı daha az gelecektir. Dolayısıyla karşılıklı yüzeylerin çıkma olasılıklarının farklarına [illegible] [illegible].

ii) Kİ KARE SINAMASI

N gözlem için $F(n)$ gözlenen frekans ve $Nf(n)$ kuramsal frekans olsun. N deneme sayısı arttıkça beklenen (kuramsal) ve gözlenen frekanslar arasındaki fark kuramsal frekansın kendisi ile aynı nisbette artmaz. Bu farkın ortalaması olarak beklenen frekansın kare kökü ile orantılı olarak arttığını söyleyebiliriz.

Yani her n için 1 basamağında olmak kaydıyla;

$$\frac{F(n) - Nf(n)}{[Nf(n)]^{1/2}}$$ ile verilir. Ayrıca negatif farkları ortadan kaldırmak için [illegible] alırız.

$$\frac{[F(n) - Nf(n)]^2}{[Nf(n)]}$$ olur.

Ayrıca ν olabilir sonuç için tüm bu terimlerin toplamı χ^2 ile gösterilirse

$$\chi^2 = \sum_n \frac{[F(n) - Nf(n)]^2}{Nf(n)}$$ olur ve toplam ν basamağında beklenir. Ama ν'den yeterince büyükse [illegible] gözlenen frekansla tahmin edilen frekanslardan ortalama olarak [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] başka dağılıma [illegible].

[illegible] bir zar için $f(n) = 1/6$'dır χ^2 6'dan büyükse zar yüklenmiştir.

Her olasılığın aynı olduğu durum için $f(n) = \frac{1}{\nu}$'dir. Ayrıca $\sum F(n) = N$ [illegible] dayanarak [illegible] [illegible]

$$\chi^2 = N\left[\nu \sum \left(\frac{F(n)}{N}\right)^2 - 1\right]$$ olarak [illegible].

DENEY

VERİLER VE VERİLERİN ÇÖZÜMLENMESİ:

Verilen kırmızı ve yeşil zarı yüz kez atıp herbir n için önce $N=10$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. Daha sonra bunu $N=100$ için yaptık

Kırmızı Zar		
N = 10		
n	F(n)	F(n)/N
1	2	0.2
2	1	0.1
3	2	0.2
4	3	0.3
5	0	0
6	2	0.2

Yeşil Zar		
N = 10		
n	F(n)	F(n)/N
1	1	0.1
2	0	0
3	1	0.1
4	1	0.1
5	1	0.1
6	6	0.6

Kırmızı Zar		
N = 100		
n	F(n)	F(n)/N
1	16	0.16
2	19	0.19
3	15	0.15
4	16	0.16
5	19	0.19
6	15	0.15

Yeşil Zar		
N = 100		
n	F(n)	F(n)/N
1	18	0.18
2	15	0.15
3	22	0.22
4	13	0.13
5	11	0.11
6	21	0.21

İlk olarak bu 4 veri gurubu için n - F(n)/N histogramlarını çizdik. Ardından karşılıklı sayı değerleri (1-6, 2-5, 3-4) için Δn - ΔF(n)/N histogramlarını çizdik.

Öncelikle teorik olarak ne beklediğimize bakalım. Zarımızın 6 yüzü olduğunu bildiğimize göre bir yüzün gelme olasılığı 1/6 olacaktır. Dolayısıyla teorikte hesapladığımız F(n)/N olasılık değerleri buna ne kadar yakındır. (1/6 = 0,166)

Kırmızı zar için; N = 10 değeri için 1/6 değerinden en fazla sapan değerler 4 ve 5 yüzleridir. 5 hiç gelmezken bunun karşısından olan 2 sayısı da en az gelme olasılığına sahip 2. zar olarak grafikten görülmektedir. Bu durumda diğer tüm yüzlerin ağır olduğunu düşünebiliriz. Özellikle 4'ün karşısındaki 3'ün çıkması 4'ün gelme olasılığı max görünüyor. Ama N = 100 değerine baktığımızda değerlerin 0,16 etrafında oynadığını görüyoruz. Hatta ilk N = 10'da hiç gelmeyen 5 sayısının olasılığı max'ı oluyor. Bu grafikten (N 100 için olan) bu zarın hileli olmadığını söyleye biliriz.

Yine bu zar için ΔF(n)/N - Δn histogramlarına baktığımızda 0'dan sapmalar 2-5 ve 3-4 yüzleri için görülmekle beraber 10 atış sonucu [illegible] sayıda [illegible] deneme miktarı olmadığından incelemek doğru olmaz. N = 100 için ise tüm karşı yüz olasılık farkları 0'a çok yakın olduğundan bir kez daha zarın hilesiz olduğunu söyleye biliriz.

Yeşil zar için N 10 değeri için 1,666 değerinden en fazla sapan değer 6'dır. Ama deneme miktarının çok az olusu kesin olarak bir sonuç verip karşısındaki 1 yüzünün yüklenmiş olduğunu söylememizi engeller. Yine N = 10 için Δn - ΔF(n)/N histogramından 0'dan en fazla sapan yüzler farkı (1-6)'dır. Kesin olarak bir şey söylemek için N = 100 [illegible] sonuçlara bakalım. Burada F(n)/N grafiğinde en fazla olasılık 3'de görülmekle beraber bunu hemen 6 takip etmektedir. Ancak ΔF(n)/N - Δn grafiğine bak-

tığımızda (3-4) farkının 0'dan max sapışını görüyoruz. Bu durumdan da gözlem sayımız büyük olduğundan 4 yüzünün yüklenmiş olduğunu söyleyebiliriz.

Şu ana kadarki incelemeler yeşil zarın hileli ve 3 yüzünün yüklenmiş olabileceği sonucunu verdi. (Yalnız ufak bir şüphede 1 yüzünün yüklenmiş olacağıdır).

CHİ KARE TESTİ:

Kuramsal bilgide de değindiğimiz gibi bu test güvenirlilik yüzdesini bulmamıza yardımcı olur.

$$\chi^2 = \sum_n \frac{[F(n) - Nf(n)]^2}{Nf(n)}$$ ile veriliyordu.

$F(n)$: deneysel verilerden elde edilen frekans değeri
N : Atış sayısı
$f(n)$: Teorik olasılık
$Nf(n)$: Teorik frekans

$f(n) = \frac{1}{6} \simeq 0.17$ ve $Nf(n) = 10 \cdot 0.17 = 1.7$

Kırmızı ve N=10

n	F(n)	Nf(n)	[ ]²/Nf(n)
1	2	1.7	0.053
2	1	1.7	0.288
3	2	1.7	0.053
4	3	1.7	0.994
5	0	1.7	1.700
6	2	1.7	0.053

Yeşil ve N=10

n	F(n)	Nf(n)	[ ]²/Nf(n)
1	1	1.7	0.288
2	0	1.7	1.700
3	1	1.7	0.288
4	1	1.7	0.288
5	1	1.7	0.288
6	6	1.7	10.876

Kırmızı ve N=100

n	F(n)	Nf(n)	[ ]²/Nf(n)
1	16	17	0.059
2	19	17	0.235
3	15	17	0.235
4	16	17	0.059
5	19	17	0.235
6	15	17	0.235

Yeşil ve N=100

n	F(n)	Nf(n)	[ ]²/Nf(n)
1	18	17	0.059
2	15	17	0.235
3	22	17	1.471
4	13	17	0.941
5	11	17	2.118
6	21	17	0.941

Tablodaki son satırları toplayarak

Kırmızı ve N=10 için; $\chi^2 = 3.1$ ~%80 güvenirlilik
Kırmızı ve N=100 için; $\chi^2 = 1.1$ ~%98 güvenirlilik
Yeşil ve N=10 " ; $\chi^2 = 13.7$ ~%2 güvenirlilik
Yeşil ve N=100 " ; $\chi^2 = 5.8$ ~%20 güvenirlilik
bulunur.

Görüldüğü gibi kırmızı zar için güvenirlilik yeterince yüksek olup yüzlerin gelmesi gelişigüzeldir.

Oysa yeşil zarda güvenirlilik düzeyi oldukça düşüktür ve bu zarın hileli olduğunu bir kez daha söyleyebiliriz.

Deneylerde N'i büyük tutmamızın nedenide budur.

5) Bence şöyle bir yöntem kullanılabilir. Her defasında 2 yüzü dışarıda bırakarak χ^2'leri hesaplarız. Buradan bir grup değer elde ederek hangi yüzlerin yüklü olduğunu buluruz. Daha sonra 1 yüzü dışarıda bırakarak χ^2'leri hesaplar yüklü yüzü buluruz.

SONUÇ VE YORUM: Yaptığımız deney sonucunda histogramlar ve chi kare testinden faydalanarak yeşil zarın hileli olduğunu bulduk ve bunu büyük bir kesinlikle söyleye biliriz. Hileli yüz ise 4 yüzünün yüklü olduğunu söyleye bilirim. (Ayrıca ufak bir şüphede 1 yüzünün yüklü olduğundur) Ama bunları büyük bir kesinlikle söyleyebilmemiz elimizdeki veri grubuyla mümkün değildir.

CEVAPLAR

1) Bir zar için tek atışta her bir yüzün ayrı ayrı gelme olasılıkları toplamı 1'dir.

$$\sum_{n=1}^{6} f(n) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Zaten bu sonuç beklenmelidir çünkü tüm uzayda bir olayın gerçekleşme olasılığı 1'i geçemez. Dolayısıyla tüm olabilirliklerin olasılıkları toplamı da birdir.

Zar hileli bile olsa, yani her yüzün gelme olasılığı $\frac{1}{6}$ olmayacaktır, yinede tüm olasılıklar toplamı birdir. Çünkü bir tarafın olasılığının yükselmesi aynı oranla karşı tarafın olasılığının azalmasını gerektirir ve sonuç yine toplam 1'i verir.

2) $N=100$, 54 yazı, 46 tura

Bu durumda paranın hileli olup olmadığına χ^2 testi ile karar verebiliriz.

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^{2} \frac{[F(n) - Nf(n)]^2}{Nf(n)} = \frac{[F(Y) - Nf(Y)]^2}{Nf(Y)} + \frac{[F(T) - Nf(T)]^2}{Nf(T)}$$

$$= \frac{[54 - \frac{100}{2}]^2}{50} + \frac{[46 - 50]^2}{50} = \frac{16}{50} + \frac{16}{50} = 0.64 \text{ olur.}$$

Güvenirlilik düzeyi %39'dan fazladır yani bunlar gelişigüzel gelmiştir. Para hilesizdir.

3) Evet 6. hesaplanabilir. Ama χ^2 testinde $n=6$ yerine $n=5$ alırsak [illegible] olay sayısı [illegible], [illegible] yine olasılık [illegible] 1/6 olacağından χ^2 [illegible] toplamından farklı [illegible]. [illegible] bunu yaparsak matematiksel ve fiziksel yanlış sonuç verir.

4) Evet $N \to \infty$'a gittikçe olasılıklar aynı olduğundan [illegible] (gelme frekansları) [illegible] yani

$$\lim_{N \to \infty} \frac{F(Y)}{F(T)} = 1 \iff \lim_{N \to \infty} [F(Y) - F(\text{Tura})] = 0$$

Zaten bu durumda deneysel olasılıkta böylece olasılıktan $\frac{1}{2}$'ye yaklaşır.

$t=3$ dk için (ayrıca $t=6$ dakika için) $s_{eno}=3$ cm. olarak veriler den elde edilmiştir
Buradan $t=3$ ve $t=6$ dk için $\vartheta_{eno}=s_{eno}\sqrt{\frac{g}{7H}}$

$$\vartheta_{eno}=3\sqrt{\frac{980}{2\cdot 7}}=25.1\ cm/s.$$ olarak bulunur.

Ayrıca $\vartheta_{rms}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,\vartheta_{eno}$ olup $\vartheta_{rms}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 25.1=30.7$ cm/s ve $\bar{\vartheta}=\sqrt{\frac{8}{3\pi}}\,\vartheta_{rms}$ olup $\bar{\vartheta}=\sqrt{\frac{8}{3\pi}}\,30.7=28.3$ cm/s olarak bulunur.

$t=9$ dk için ise $s_{eno}=4$ cm olarak görülüyor.

Buradan $\vartheta_{eno}=4\sqrt{\frac{980}{2\cdot 7}}=33.5$ cm/s bulunur.

$\vartheta_{rms}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,33.5=41.0$ cm/s ve $\bar{\vartheta}=\sqrt{\frac{8}{3\pi}}\,41.0=37.8$ cm/s bulunur

Buradan her s değeri için f(s) değerlerini bulup grafiğe geçirebiliriz. Ama öncelikle f(s) eşitliğinde $s=s_{eno}$ durumunu alıp f(s)'i tamamı ile s_{eno}'ya bağlı yazarsak

$$f(s)=F(s_{eno})\cdot e\cdot(s_{eno})^{-2}s^2e^{-\frac{s^2}{s_{eno}^2}}$$ buluruz. Yada düzenlersek $$f(s)=\frac{F(s_{eno})e}{(s_{eno})^2}s^2e^{-s^2/(s_{eno})^2}$$ olur.

Bu formül yardımıyla her bir s için $t=3, 6, 9$ dk'larda f(s) leri hesaplayıp tabloya geçirdim⁺

s(cm)		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3 dk	f(s) olasılık	11.8	33.9	43.7	35.7	20.5	8.7	2.8	0.7	0.1	0.02	0.002	~0	~0	~0	~0	~0
6 dk		12.7	36.4	41.0	38.4	22.1	9.4	3.0	0.7	0.1	0.02	0.002	~0	~0	~0	~0	~0
9 dk		8.9	29.4	48.7	55.9	49.8	36.0	21.7	11.1	4.9	1.8	0.6	0.2	0.04	0.09	0.002	~0

Ayrıca $V=72\ cm^3$, $N=400$ $r\simeq 0.1$ cm. ile ortalama serbest yol λ

$$\lambda\simeq\frac{72}{400\times 4\pi\times(0.1)^2\sqrt{2}}\simeq 1.0$$ cm. olur. Bilyelerin birim zamandaki çarpışma sayısı ise (ortalama);

$$\bar{z}=\frac{\vartheta}{\lambda}$$ olup $$\vartheta=s\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2H}}=3\sqrt{\frac{980}{2\cdot 7}}=25\ cm/s$$ olup

[illegible],

$$\bar{z}=\frac{25\ cm/s}{1\ cm}=25\ s^{-1}$$ olup cam bilyeler saniyede

⁺ Formüller $t=3$ dk için $f_3(s)=13.2\ s^2e^{-s^2/}$

$t=6$ dk için $f_6(s)=14.2\ s^2e^{-s^2/9}$

$t=9$ dk için $f_9(s)=9.5\ s^2e^{s^2/16}$ haline gelir.

25 çarpışma yapıyor

SONUÇ VE YORUM: Deney sonucunda kuramsal değerler ile gözlenen değerlerin V_{ero} civarında uyuştukları onun V_{ero}'dan uzaklaştıkça büyük sapmaların görüldüğünü grafikten çıkarmak mümkündür. Bu sapmalar baştan da söylendiği gibi çok hızlı olup çepere çarpıp geri dönen bilyelerden kaynaklanabileceği gibi N sayısının az olmasından da kaynaklanabilir.
Ayrıca başta s=3 cm'de gözüken V_{ero}, 9 dk. değeri için s=4 cm'de ortaya çıkmıştır. Çarpışan bilyelerin T sıcaklığının [illegible] r [illegible]gelmesi buna neden olmuş olabilir.

Daha düzenli rapor hazırlamalısın!

Sen raporda ne anlarsın

gerizekalı!

Sizler kafalarımızı açıp

öğrencilerimize kavram atmaktan

başka bir işle meşgul oldunuz mu;

Hiç gerçekten bilimsel çalışma

yaptınız mı?

Bu saçma anket üretip

DOĞA'dan kanıt deneyleri

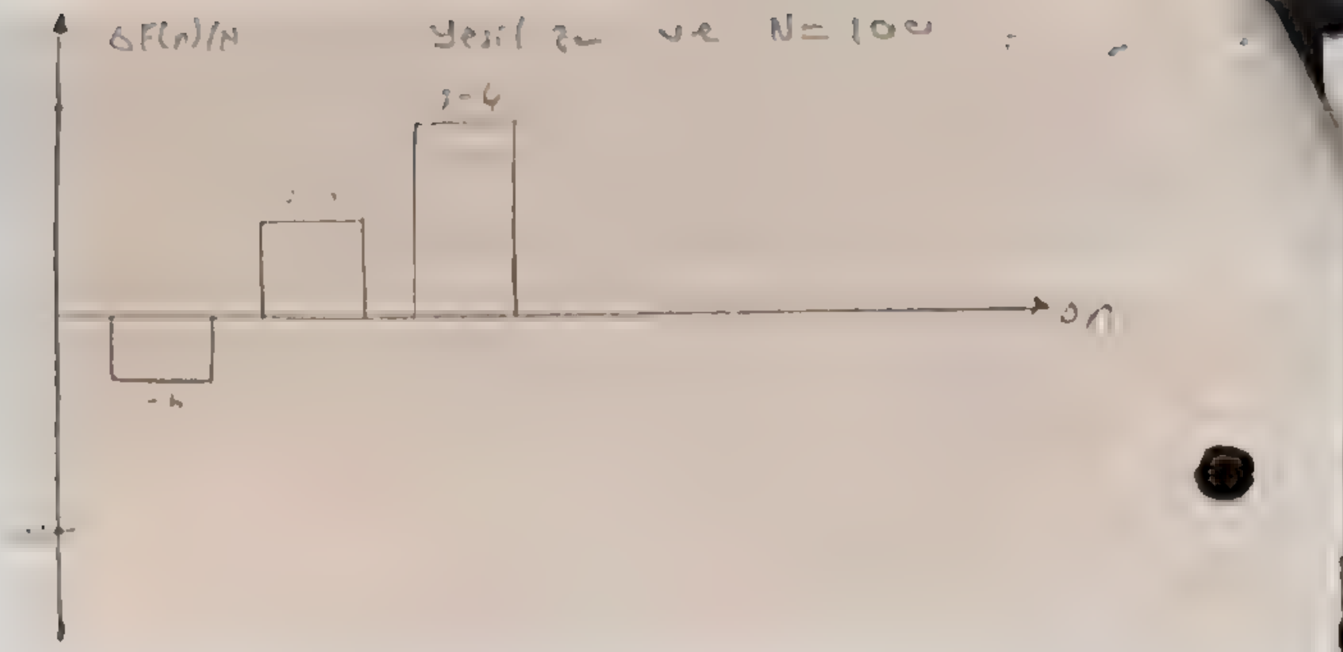
araştırmalarını yaymaya

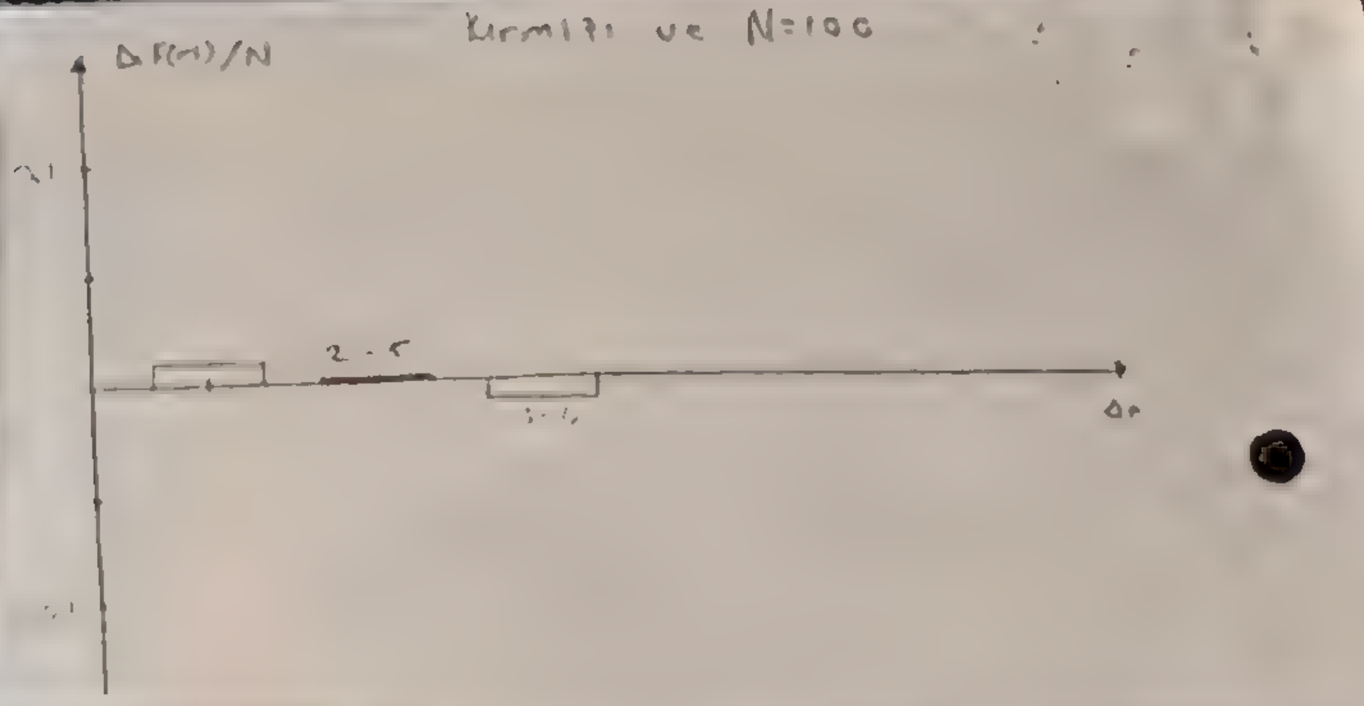
beziniz?

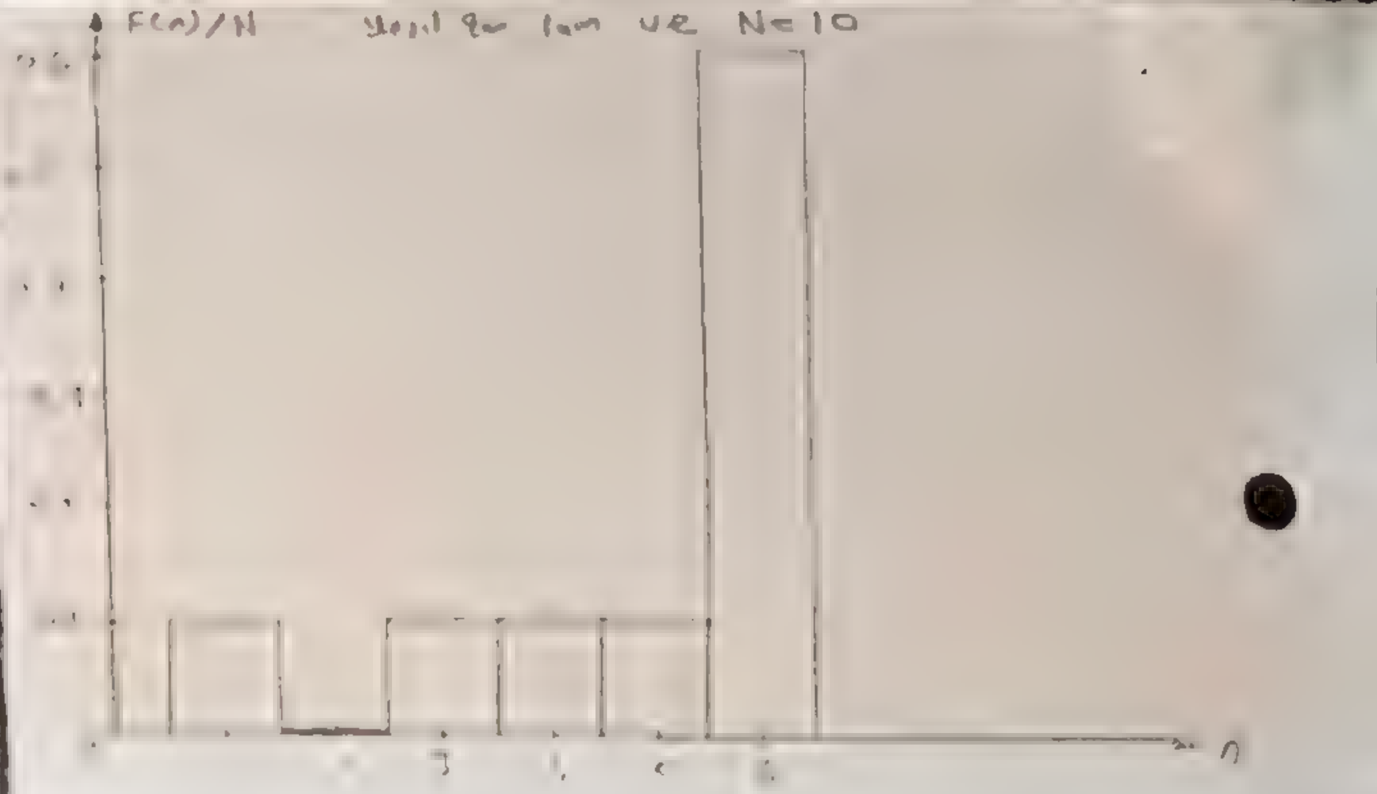
İşte bu [illegible] bir [illegible]

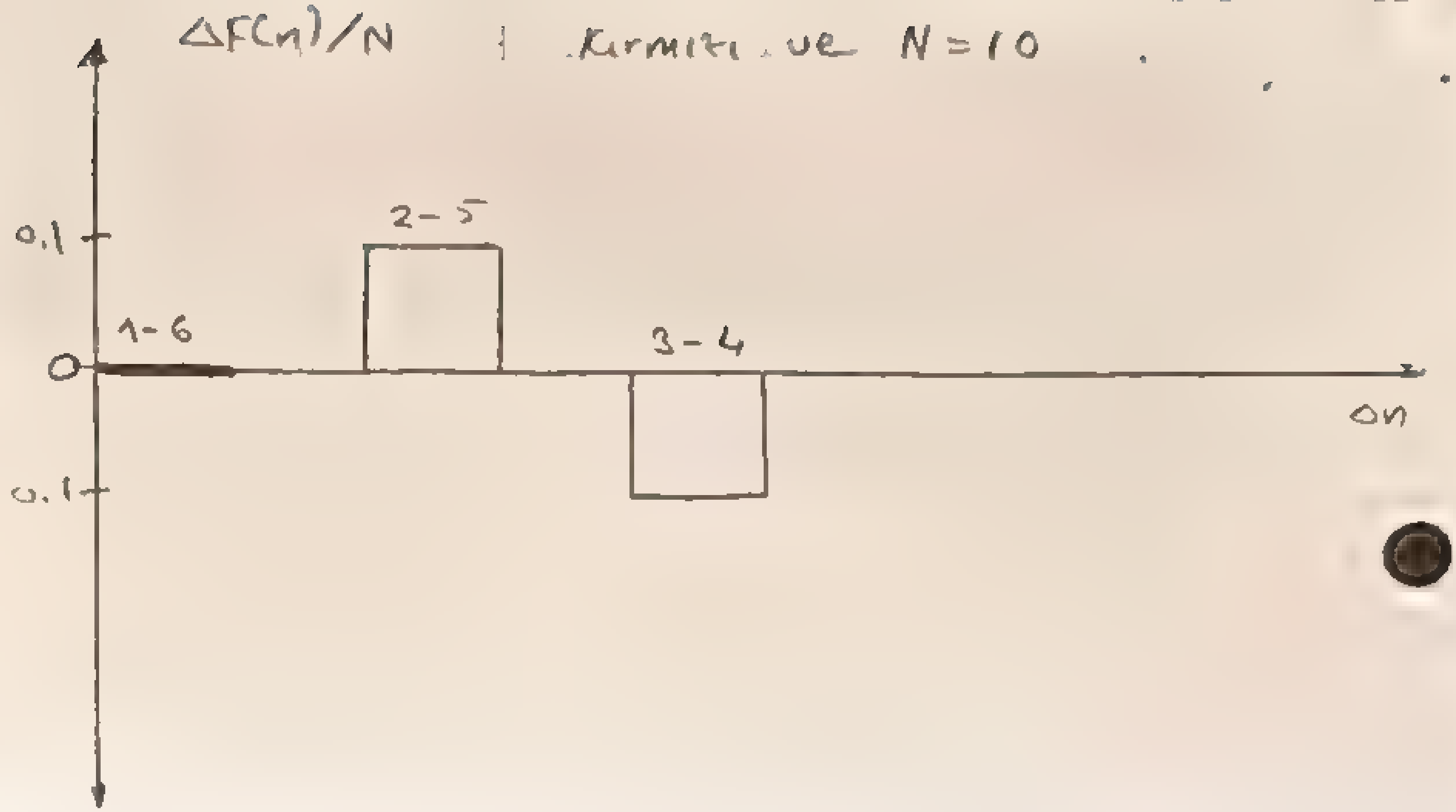
[illegible] alanında sizin

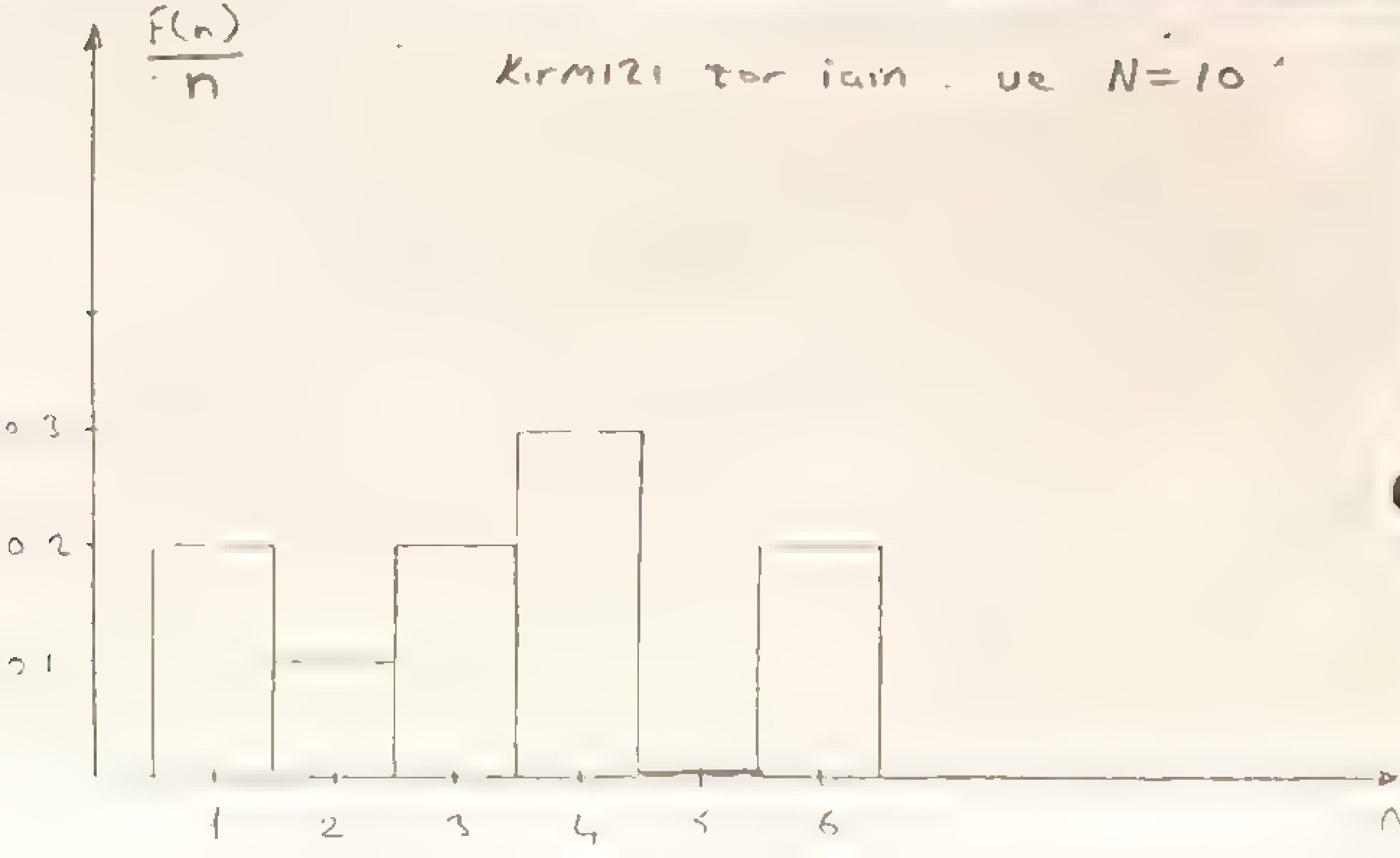
[illegible]


ΔF(n)/N
Δn


ΔF(n)/N
Kırmızı ve N=100
2-5


F(n)/N
N=10
n


ΔF(n)/N
Kırmızı ve N=10
0.1
1-6
2-5
3-4
0
0.1
Δn


F(n)/n
Kırmızı zar için ve N=10
0.3
0.2
0.1
1
2
3
4
5
6
n

MAXWELL HIZ DAĞILIMI

Amaç: Bir sistemin makroskopik durumunu; sistemi oluşturan parçacıkların hız (enerji) dağılımlarını bularak incelemeyi öğrenmek.

Kuramsal Bilgi: Yalıtık ve kapalı iç gazla dolu bir hacim içindeki parçacıkların mikroskopik (kuantum) durumları, o sistemin (hacim içindeki gazların) makroskopik durumunu belirler. Klasik ~~istatistik fizik~~ Termodinamik bir sistemin makroskopik durumlarını incelerken; o sistemin o andaki en olası halini oluşturan mikroskopik durumları göz önüne alır. Oysa sistemin o an için gözlenen durumu, kuantum fiziğinden yararlanan ve dalga tabiatı (parçacığın) üzerine kurulan İstatistik Fizik için sistemin gözlenen makroskopik durumu için, o durumu veren erişilebilir (accessible) kuantum durumlarının sayısıyla, dolayısıyla bir olasılıkla açıklanabilir. O makroskopik durumu veren, en olası kuantum durumları olabileceği gibi en küçük olasılıklı kuantum durumları o makroskopik durumu verebilir.

Sistemin makroskopik durumu (T, E, P gibi niceliklerin ölçülmesi ile belirlenen durum), sistemi oluşturan parçacıkların tek tek hızlarının ölçülmesi, ve bunların toplanmasıyla, mikroskopik durumların bilinmesine gerek kalmadan belirlenebilir.

Maxwell-Boltzman parçacıkları klasik mekanik yasalarının uygulanabildiği parçacıklardır. (Sistemi oluşturan çok atomlu yada ayırd edilebilir parçacıklar olarak nitelendirilirlik). Eğer sistemi oluşturan gaz, yeteri derecede seyreltikse, atomlar yada moleküller arası uzaklık nedeniyle, parçacıklar arasındaki etkileşmeler zayıftır. Ayrıca moleküller arası uzaklık uzaklık çok büyük olduğunda kuantum mekaniksel etkiler göz ardı edilir. Bu durumda sistemi oluşturan gaz atomlarının dalga boylarının kutunun boyutlarından çok küçük olmasıda seçilmelidir. Sözü edilen koşulu uyan gaza ideal gaz denir. İdeal gaz sistemindeki parçacıkların hızları, enerjileri sürekli olarak dağılırlar.

(1)

$P_r \propto e^{-\beta E_r}$ $\quad \beta = \frac{1}{kT}$

$r, dr + r \;,\; p \to p + dp$

$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$

$$P(\vec{r}, \vec{p})\, d^3\vec{r}\; d^3\vec{p} \propto e^{-\beta p^2/2m}\, d^3\vec{r} \cdot d\vec{p}^3$$

$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$ $\quad d^3v = dv_x\, dv_y \cdot dv_z$

$d^3r = dx\, dy\, dz$

$d^3p = dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$

$$P^3(\vec{r}, \vec{v})\, d^3r\, d^3\vec{v} \propto e^{-\beta m v^2/2}\, d^3\vec{r}\, d^3v$$

$f(\vec{v}) \cdot d^3v \equiv v, v + dv$

$f(\vec{v})\, d^3v = N\vec{P}(\vec{r}, \vec{v})\, d^3r\, d^3v$

$f(\vec{v})\, d^3\vec{v}) = c_1\, e^{-\beta/mv^2/2}\, d^3\vec{v}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{v})\, d^3v = n = c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta m v^2/2}\, d^3v$$

$$= c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta m v_x^2/2}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta m v_y/2}\, dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \ldots$$

$$= c \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\beta m}{2}}} \sqrt{} \sqrt{} = c \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{3/2}$$

$$n = c^3 \left(\frac{2\pi}{\beta m}\right)^{3/2} n$$

$$c^3 = n \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{v})\, d^3v = n = c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta m v^2/2}\, d^3v$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}\overbrace{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}^{R} \qquad R = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{L}{\hbar\pi} 2mE_n$$

n_x, n_y, n_z pozitif sayılar olabilir bunun için R yarıçaplı kürenin $\frac{1}{8}$ lik kesimi, $(n_x n_y n_z)$ uzayında parçacığın girilebilir kuantum durumları sayısını sağlar

$$g(E_n) = \frac{1}{8}\,\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{V}{6\pi^2}\left(\frac{2mE_n}{\hbar^2}\right)^{3/2}$$

Buradan, enerji başına düşen girilebilir kuantum durumları sayısı olarak ifade edilen durum yoğunluğu

$dg(E_n) = D(E_n)\,dE$ 'den;

$D(E_n) = \frac{V}{4\pi^2}(2m/\hbar^2)^{3/2} E_n^{1/2}$ dir. (Durum yoğunluğu)

Enerjide ki artım girilebilir kuantum durumları sayısını (g_n)'ı arttırır bu da $D(E_n)$'i arttırır.

Yapacağımız deneyde gaz atomları yerine boncuklar kullanacağız. Aynı büyütme amacında da sistemin hacmini büyüteceğiz.

$x \cdot t = s \qquad t = s/v$

$\frac{1}{2}gt^2 = H \qquad t = \left(\frac{2H}{g}\right)^{1/2}$

$$\frac{s}{v} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow s = v\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Bir molekülün hızının v ile $v+dv$ arasında dalgalanma(?) olasılığı (bu dalgalanmanın sabit kalması, sistemin dış parametrelerinin durgun kalması için titreşim frekansını sabit tuttuk)

$$P(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}\, v^2\, dv$$

ile verilir. $P(v)$ olasılığı; tek parçacık için gözlenen hızdan, çok parçacık için bu hızı veren olası kuantum durumlarının toplamıdır.

Bu toplamda yandaki dağılımı gösterir.

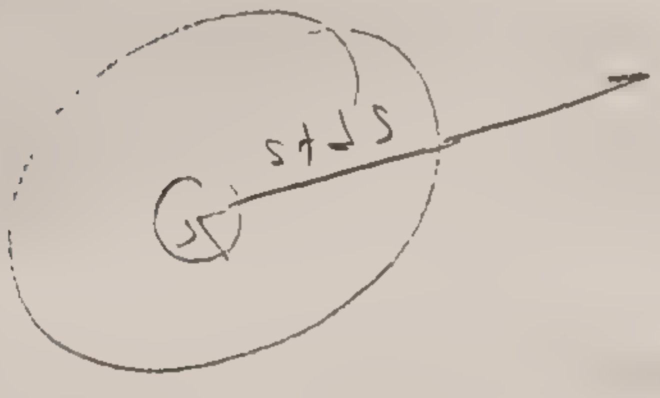
(2)

$$F(\vec{v})\,dv = v,\ v + dv$$

$$F(\vec{v})\,d\vec{v} = \int f(v)\,d^3\vec{v}$$

$$\vec{v} < |\vec{v}| < \vec{v} + d\vec{v}$$

$$F(\vec{v})\,dv = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right) e^{-mv^2/2kT}\, v^2\,dv$$



v_y

$$v^2 = ds^2$$

$$\frac{df}{dv} = 0$$

$$v_{mp} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$$

$$\bar{v} = \int_0^\infty F(v)\,v\,dv \qquad \int_0^\infty F(v)\,dv = n$$

$$\bar{v} = \frac{1}{n}\int_0^\infty F\,v\,v\,dv$$

$$V_{rms} = \sqrt{\bar{v^2}}$$

Undocumented
Micro Soft

PAN CAKE

PAN CAKE

Dağılığın maksimum değerini aldığı hız, en olası hız olarak isimlendirilir.

$$\frac{\partial P(v)}{\partial v} = 0 \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial^2 P(v)}{\partial^2 v} = +(\text{bir sayı})$$

maksimum hız değeri bulunur. Bu da;

$$\underline{V_{eo}} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \quad \text{dir.}$$

$$\int_0^\infty P(v)dv = 1$$

$$K \int_0^\infty \vartheta^2 \exp(-m\vartheta^2/2kT)dV = 1$$

$$I_2 = \int_0^\infty \vartheta^2 \exp(-\alpha\vartheta^2)dv = \pi^{1/2}/4\alpha^{3/2}$$

$$|\bar{\vartheta}| = \int_0^\infty P(v)\vartheta dV$$

$$= K\int_0^\infty \vartheta^3 exp(-\alpha\vartheta^2)dv = KI_3$$

$$\alpha = \frac{m}{2kT}$$

$$I_3 = \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{1}{2}(2kT/m)^2$$

$$K = \frac{4}{\pi^{1/2}}(m/2kT)^{3/2}$$

$$|\bar{\vartheta}| = \left(\frac{8kT\pi}{\pi m}\right)^{1/2} = \frac{8}{3}$$

$$\overline{\vartheta^2} = \int_0^\infty \vartheta^2 P(\vartheta)d\vartheta = \int_0 \vartheta^2 K \exp(-m\vartheta^2/2kT)dV = KI_4$$

$$I_4 = \int_0^\infty \vartheta^4 \cdot \exp(-\alpha\vartheta^2)d\vartheta = \frac{3\pi^{1/2}}{8\alpha^{5/2}}$$

$$\overline{\vartheta^2} = 3kT/m \Rightarrow \vartheta_{rms} = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2}$$

$$\underline{\bar{\vartheta}} = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} = \left(\frac{8}{3\pi}\right)^{1/2}\vartheta_{rms} = 0.921\,\vartheta_{rms}$$

$$\underline{\vartheta_{eo}} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\vartheta_{rms} = 0.81\,\vartheta_{rms}$$

Yukarıdaki çıkarsamaları bir tek parçacık için yapmıştık. Şimdi de içinde N tane parçacık olan bir hacim için aynı çıkarımı N ile çarpmamız gerekecektir.

$$N(v)d\vartheta = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-m\vartheta^2/2kT}\,\vartheta^2 d\vartheta$$

denklemi Maxwell hız dağılım fonksiyonu olarak tanımlanır.

f : 2600 Hz

cm	3dk	6dk	9dk
1	1	2	7
2	10	9	15
3	44	47	51
4	43	43	56
5	35	33	38
6	25	25	29
7	25	24	27
8	23	24	25
9	19	17	14
10	13	14	9
11	9	7	13
12	12	8	11
13	5	8	9
14	5	3	4
15	5	5	7
16	2	1	4
17	3	3	6
18	4	2	3
19	3	3	1
20	3	3	2
21	2	3	5
22	4	3	1
23	6	2	3
24	3	3	3
	304	302	344
	5 + 91	811	5 + 41

30
310
60

M.H.D. fonksiyonunu s 'ye bağlı bir fonksiyona dönüştürürsek.

$$A = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$ sabitlerini yeniden düzenleyelim

$$A = 4\pi N\left(\frac{1}{\pi}\right)^{3/2}\left[\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}\right]^3 = \frac{4\pi N}{\pi^{3/2}}\frac{1}{\vartheta_{en}^3} = \frac{B}{\vartheta_{en}^3}$$

$$N(\vartheta) = \frac{B}{\vartheta_{en}^3} e^{-\vartheta^2/\vartheta_{en}^2} \vartheta^2$$ olur.

İlk denklemimiz den $\vartheta = s\sqrt{\frac{g}{2H}}$ demiştik. Yukarıdaki denklemde yerine koyarak

$$N(s) = N4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m/2kT \, \frac{s^2 g}{2H}} \cdot \frac{s^2 g}{2H} \; ; \; \frac{\partial N(s)}{\partial s} = 0 \; ; \; s_{en} = \left(\frac{4kTH}{mg}\right)^{1/2}$$

$$N(s) = B\frac{s^2}{s_{en}^3} e^{-s^2/s_{en}^2}$$

Eğer $s = s_{en}$ ise $N(s) = N(s_{en})$ olur. Buradan B sabiti

$$N(s_{en}) = B \cdot \frac{s_{en}^2}{s_{en}^3} e^{-s_{en}^2/s_{en}^2} = B \frac{1}{s_{en}} e^{-1}$$ e: 2.7183

$$B = N(s_{en}) e^{+1} \cdot s_{en}$$

$$N(s_e$$
$$N(s_{en}) \frac{s^2}{s_{en}^2} e^{1} e^{-e^2}$$

$$N(s) = N(s_{en}) \cdot s_{en} \cdot e \frac{s^2}{s_{en}^3} \cdot e^{-s^2/s_{en}^2} = N(s_{en}) \frac{s^2}{s_{en}^2} e^1 \cdot e^{-s^2/s_{en}^2} =$$

Ent [N] * 3^2 * ent [s_{en}] shift x^2 * 2.7183
* C C ent s^2 − / s_{en} shift

Verilerin Çözümlerini

$t = 3$ dk için

$s_{en} = 4$ cm

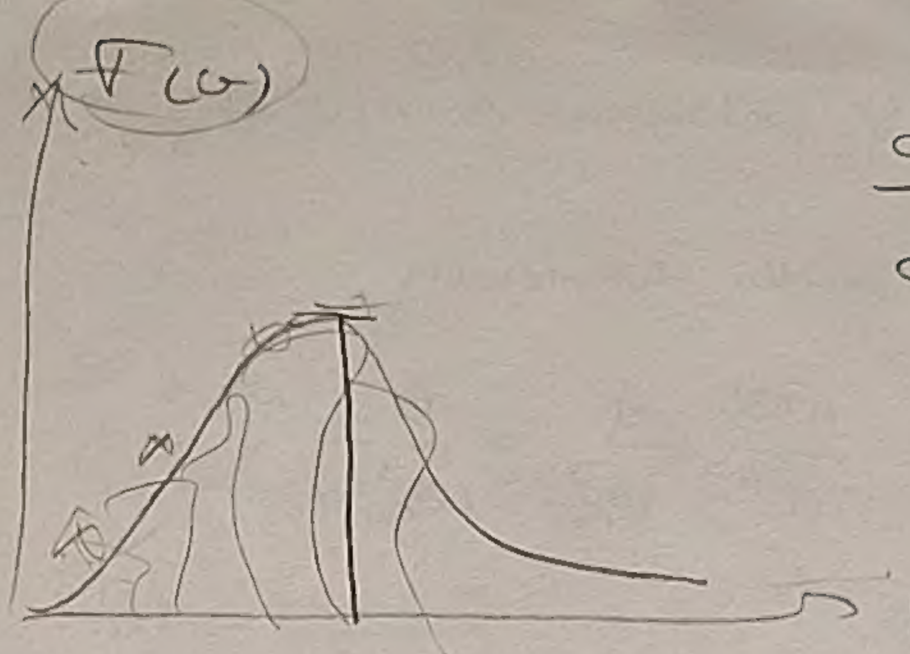
$$\vartheta_{en} = s\sqrt{\frac{g}{2H}} = 4\sqrt{\frac{980}{2 \times 7}} = 4\sqrt{\frac{980}{2 \times 7}} = \underline{33.4} \text{ cm/s (Deneysel)}$$

$$\vartheta_{en} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\quad} = \sqrt{\frac{2 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 297}{17 \times 10^{-6}}} = \underline{2.18 \times 10^{-3}} \text{ m/s (teorik)}$$

k, boltzman ä sabiti mikro düzeyde geçerli olduğu için makro düzeyde geçerli değil.

$$\vartheta_{en} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\vartheta_{rms} \Rightarrow \vartheta_{rms} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\vartheta_{en} = \underline{40.9 \text{ cm/s}}$$

$$\bar{\vartheta} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} * \vartheta_{rms} = 0.921 \times 40.9 = \underline{37.6} \text{ cm/s}$$



$$\frac{dF(\upsilon)}{d\upsilon} = 0 =$$

$$\upsilon_{eno} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$$

$$F(\upsilon) \propto \frac{\upsilon^2}{\upsilon_{eno}^2} e^{-\upsilon^2/\upsilon_{eno}^2}$$

$\upsilon^2 = a s^2$ $F(s) = A \frac{s^2}{s_{eno}^2} e^{-s^2/s_{eno}^2}$

$F(s)$ $s = s_{eno} \to A$

$\upsilon_{eno} = ?$

$\bar{\upsilon} = ?$

$\upsilon_{rms} = ?$

$$\bar{\upsilon} = \frac{\int_0^\infty F(\upsilon)\,\upsilon\,d\upsilon}{\int_0^\infty F(\upsilon)\,d\upsilon} = \frac{1}{n}\int_0^\infty F(\upsilon)\,\upsilon\,d\upsilon$$

$$\int_0^\infty F(\upsilon)\,d\upsilon = n$$

$$\upsilon_{rms} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}}$$

$$\overline{\upsilon^2} = \frac{1}{n}\int_0^\infty F(\upsilon)\,\upsilon^2\,d\upsilon$$

$\lambda =$ $N =$

z

$t=6$ dak., $t=9$ dak. içinde $S_{enø} = 4$ cm olduğundan her $t=3$ dak. için hesaplanan $\vartheta_{enø}$, ϑ_{kok}, $\bar{\vartheta}$ değerleri aynı olacaktır.

Şimdi her S değeri için $N(S)$ değerlerini bulup deneysel değerlerle karşılaştırabiliriz.

$t=3$ dak.

$S_{enø} = 4$ cm $\qquad N(S_{enø}) = 55$ ise

$$N(S) = \frac{55 \times 2.71}{16} \times S^2 e^{-S^2/S_{enø}} \quad (t=3 \text{ dak})$$

$$N(S) = 9.45\, S^2 e^{-S^2/16}$$

	S(cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t=3 dak	N(S)	8.87	29.4	48.4	55.6	49.5	35.8	21.6	11.0	4.8	1.8	0.5
t=6 dak		6.67	22.1	36.4	41.8	37.2	26.9	16.2	8.3	3.64	1.37	0.44
t=9 dak		6.5	21.6	35.5	40.8	36.3	26.3	15.9	8.1	3.55	1.3	0.43

$$N(S) = \frac{42 \times 2.71}{16} e^{-S^2/16} = 7.11\, e^{-S^2/16} \times S^2 \quad (t=6 \text{ dak})$$

$$N(S) = \frac{41 \times 2.71}{16} e^{-S^2/16} = 6.94\, e^{-S^2/16} \times S^2 \quad (t=9 \text{ dak})$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{\vartheta}}{\lambda} \qquad V = 12 \times 6 = 72 \text{ cm}^3$$

$N = 408$

$$\lambda = \frac{V}{N \times 4\pi r^2 \sqrt{2}} \qquad r \cong 0.1 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{72}{408 \times 4\pi (0.1)^2 \sqrt{2}} = \frac{72}{72.5} = 0.99 \simeq 1$$ (parçacıkların ortalama serbest yolu)

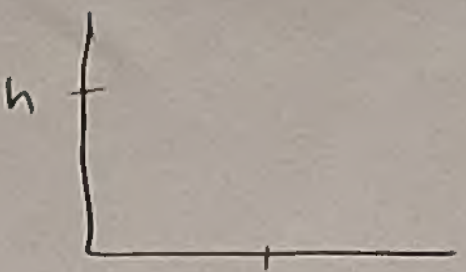
parçacıkların birim zamandaki ortalama çarpışma sayısı,

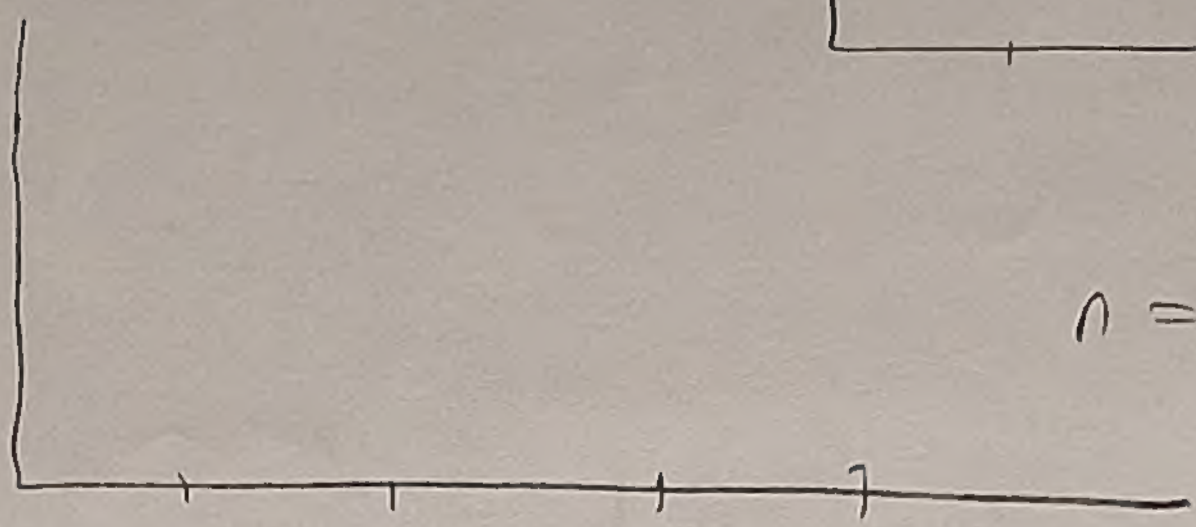
$$\bar{Z} = \frac{\bar{\vartheta}}{\lambda} = \frac{\vartheta}{\lambda} = \frac{55}{1} = 55\, s^{-1}$$ (saniyede 55 çarpışma yapıyorlar)

Sonuç ve Yorum: S parçacıkların hızlarının bir değişkeni olduğundan, S direkt olarak parçacıkların enerjilerine bağlıdır. Buna göre $t = 3, 6, 9$ dakika şeklinde zamanı uzatırsak, sistem denge durumuna gelmeye başlar.

$$\left(\frac{\partial \ln g_r}{\partial E}\right)_{E_*} = \beta$$ β değeri gittikçe azalır. Sistemin T sıcaklığı artar.

$S = v\sqrt{\frac{2H}{g}}$





$\int f(v)\, d^3v = n$

$n = C \int e^{-\beta m v^2/2}\, d^3v$

$dv_x\, dv_y\, dv_z$

$n = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta m v_x^2/2}\, dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta m v_y^2/2}\, dv_y$

$\left(\frac{\pi}{\frac{1}{2}\beta m}\right)^{1/2}$

$N(v)\,dv = N\, 4\pi\, \exp\left(-\frac{m}{2kT}\right) v^2\, dv$

$r,\ E_r$ $\quad \boxed{P_r \propto e^{-\beta E_r}}$ $\quad \beta = \frac{1}{kT}$ $\quad \boxed{C = n\left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2}}$

$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ $\quad r,\ r+dr \quad p,\ p+dp$

$P(\vec{r},\vec{p})\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{p} \propto e^{-\beta p^2/2m}\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{p}$

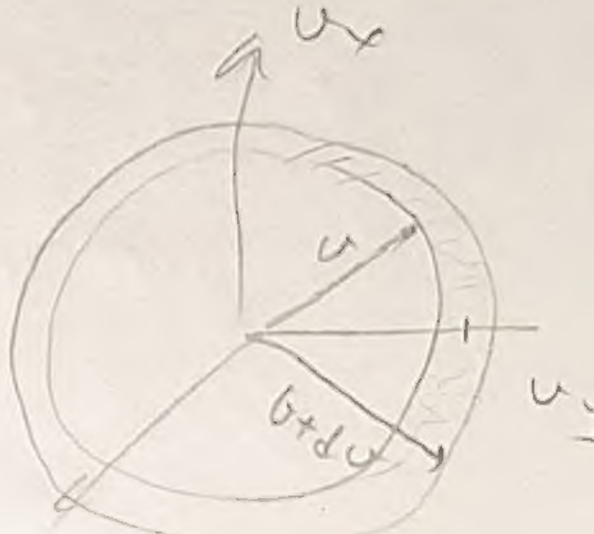
$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$ $\quad v,\ v+dv$

$$\boxed{P'(\vec{r},\vec{v})\, d^3\vec{r}\, d^3v \propto e^{-\beta m v^2/2}\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{v}}$$

$f(\vec{v})\, d^3\vec{v} \equiv \vec{v},\ \vec{v}+d\vec{v}$

$f(\vec{v})\, d^3\vec{v} \propto \frac{N\, P'(\vec{r},\vec{v})\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{v}}{d^3\vec{r}}$

$$\boxed{f(\vec{v})\, d^3v = C'\, e^{-\beta m v^2/2}\, d^3\vec{v}}$$



$F(v)\, dv \equiv v,\ v+dv \quad , \quad v = |\vec{v}|$

$F(v)\, dv = \int' f(v)\, d^3v = 4\pi f(v)\, v^2\, dv \quad \sim \quad 4\pi v^2\, dv$

$v < |\vec{v}| < \vec{v}+d\vec{v}$

$$\boxed{F(v)\, dv = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}\, v^2\, dv}$$